2017-2018 ÖĞRETİM YILI ANALİZ 2 DERSİ ARASINAVI CEVAP KAĞIDI (BİRSEN HOCA)

1-) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2}, & x>3 \\ x^2-9x+22, & x\le 3 \end{cases}$ fonksiyonu için $f'(3)$'ü bulunuz.

ÇÖZÜM: $f'(3^+)$ **ve** $f'(3^-)$ türevlerinin var ve eşit olduğunu gösterelim;

fonksiyonun tanımından $f(3)=4$ olup

$$f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{x+1}{x-2}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-3x+9}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-3}{(x-2)}=-3$$

ve

$$f'(3^-)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9x+22-4}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x-6)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-6)}{(x-2)}=-3$$

bulunur. Buradan

$$f'(3^+)=f'(3^-)=f'(3)=-3$$

elde edilir.

2-) $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}$ için $y'=?$

ÇÖZÜM:

$$y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}\Rightarrow \ln y=\ln(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{\sin x}{3x}\ln(\arcsin x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{3x\cos x-3\sin x}{9x^2}\ln(\arcsin x)+\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\frac{\sin x}{3x}$$

$$\Rightarrow y'=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}\left(\frac{3x\cos x-3\sin x}{9x^2}\ln(\arcsin x)+\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\frac{\sin x}{3x}\right)$$

elde edilir.

3-) (a) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ **(b)** $\int\sin^{-6}x\cdot\cos^7 x\cdot dx$ integrallerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: **(a)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ integralinde $u=e^x$ değişken değiştirmesi yapılırsa $du=e^x dx \;\Rightarrow\; dx=\frac{du}{e^x}$ olup

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}dx=\arcsin u+c=\arcsin e^x+c$$

bulunur.

(b) $\int \sin^{-6}x\cos^7 x\,dx=\int \sin^{-6}x\cos^6 x\cos x\,dx=\int \sin^{-6}x\left(1-\sin^2 x\right)^3\cos x\,dx$

yazılır. $u=\sin x$ değişken değiştirmesi yapılırsa $du=\cos x dx$ olup

$$\begin{aligned}\int \sin^{-6}x\cos^7 x\,dx&=\int \sin^{-6}x\left(1-\sin^2 x\right)^3\cos x\,dx\\&=\int u^{-6}\left(1-u^2\right)^3\,du\\&=\int u^{-6}\left(1-3u^2+3u^4-u^6\right)\,du\\&=\int u^{-6}du-3\int u^{-4}du+3\int u^{-2}du+\int\,du\\&=-\frac{u^{-5}}{5}+u^{-3}-3u^{-1}+u+c\\&=-\frac{1}{5}(\sin x)^{-5}+(\sin x)^{-3}-3(\sin x)^{-1}+\sin x+c\end{aligned}$$

elde edilir.

4-) 100cm uzunluğunda bir tel herhangi bir noktadan iki parçaya bölünerek bir çember ve bir kare yapılmak isteniyor. Kare ile çemberin alanları toplamının maksimum olması için çemberin yarıçapı ne olmalıdır? Karenin kenar uzunluğu ne olmalıdır? Toplam alan nedir?

ÇÖZÜM: $100=100-x+x$ olmak üzere $100-x$ cm ile kare x cm ile çember yapılsın. Karenin bir kenarına a denirse $4a=100-x\Rightarrow a=\frac{100-x}{4}$ olur. Çemberin yarıçapına r denirse $2\pi r=x\Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}$ olur. Alanlar toplamı πr^2+a^2 olduğundan alanlar toplamının değişkenine bağlı fonksiyonu

$$f(x)=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

bulunur.

$$f'(x)=-\frac{2}{4}\left(\frac{100-x}{4}\right)+\frac{2\pi}{2\pi}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=-\left(\frac{100-x}{8}\right)+\frac{x}{2\pi}=\frac{-\pi(100-x)+4x}{8\pi}=\frac{-100\pi+\pi x+4x}{8\pi}$$

olup

$$f'(x)=\frac{-100\pi+\pi x+4x}{8\pi}=0 \;\Rightarrow\; x(\pi+4)=100\pi \;\Rightarrow\; x=\frac{100\pi}{4+\pi}$$

olur. Buradan

$$r=\frac{x}{2\pi}=\frac{100\pi}{4+\pi}\frac{1}{2\pi}=\frac{50}{4+\pi} \qquad \text{ve} \qquad a=\frac{100-x}{4}=\frac{100-\dfrac{100\pi}{4+\pi}}{4}=\frac{100}{4+\pi}$$

bulunur.

$$\text{Toplam alan}=\left(\frac{100}{4+\pi}\right)^2+\pi\left(\frac{50}{4+\pi}\right)^2=\frac{100^2}{4\pi+\pi^2}$$

dır.

5-) $f(x)=\ln(x+1)$ fonksiyonunun Maclaurin formülünü yazınız.

ÇÖZÜM:

$$f(x)=\ln(x+1)\Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=+\frac{1.2}{(x+1)^3}\Rightarrow f'''(0)=1.2,$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{1.2.3}{(x+1)^4}\Rightarrow f^{(4)}(0)=(-1)1.2.3$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n\neq 0 \text{ için})$$

olup

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+x+\frac{(-1)}{2!}x^2+\frac{2!}{3!}x^3+\frac{(-1)3!}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

elde edilir.

6-) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup fonksiyonun monotonluğunu, bükeyliğini ve ekstremum noktalarını inceleyiniz. Varsa yerel ekstremum noktalarını, dönüm noktalarını bulunuz. Grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Fonksiyonun tanım kümesi

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} > 0 \right\} = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

olur.

Fonksiyon eksenleri kesmez.

$$\lim_{x \to 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = -\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to -3^-} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = +\infty$$

olduğundan $x = 2$ ve $x = 3$ düşey asimptottur.

$\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) \Rightarrow f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

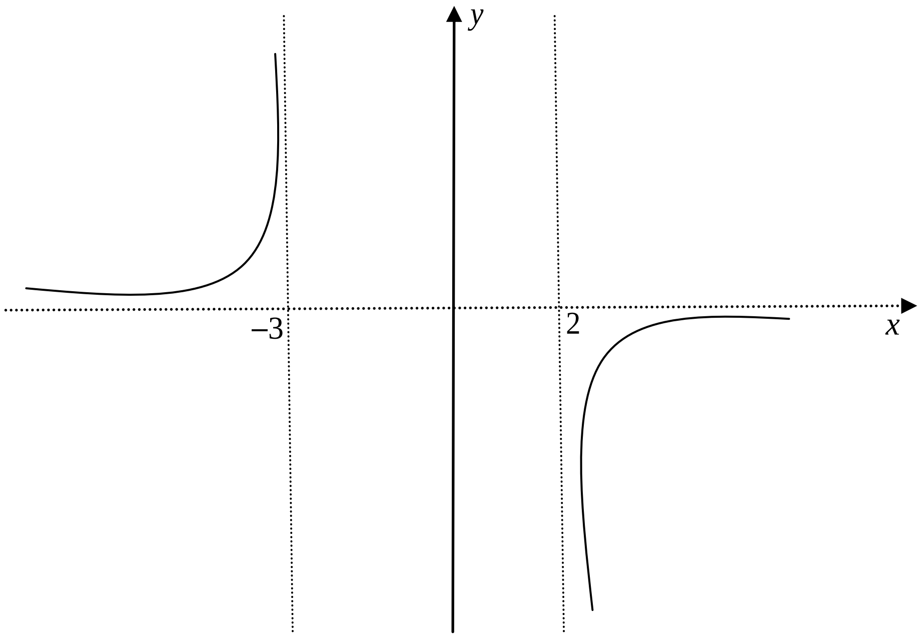
olduğundan $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ kümesinde $f'(x) > 0$ olur.

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{-10x-5}{(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{-10x-5}{(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{-5(2x+1)}{(x-2)^2(x+3)^2}$$

yazılır. $(-\infty, -3)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan f konvekstir. $(2, +\infty)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan f konkavdır.

x	$-\infty$ -3		2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$ ∪		$-\infty$ ↗ 0 ∩

olup fonksiyonun grafiği



biçimindedir.

7-) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}{\cosh x-1}\to\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L`Hospital kullanırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)\right)'}{\sinh x}$$

yazılır. Ayrıca

$y=\operatorname{arcsin}hx\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğu biliniyor. Eğer $y=\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)$ ifadesinde $u=x^2$ denirse

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}2x=\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)}{\cosh x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{arcsin}h\left(x^2\right)\right)'}{\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}}{\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x^4+1}}=1.2=2$$

elde edilir.

8-) Lagrange teoremini ifade edip ispatlayınız.

ÇÖZÜM: Lagrange (Ortalama Değer) teoreminin ispatı ders notlarında mevcuttur.

9-) $y^2 - e^{x^4 - y^2} = 0$ denklemiyle kapalı şekilde verilen $y = y(x)$ fonksiyonunun $y = 1$ ordinatlı noktalarının birinden çizilen teğet ve normal denklemi nedir?

ÇÖZÜM: $y^2 - e^{x^4 - y^2} = 0$ denkleminde $y = 1$ alınırsa

$$e^{x^4 - 1} = 1 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$

bulunur. $A = (1,1)$ noktasından geçen teğet ve normal denklemlerini bulalım

$$y^2 - e^{x^4 - y^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2yy' - (4x^3 - 2yy')e^{x^4 - y^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; y' = \frac{4x^3 e^{x^4 - y^2}}{2y + 2ye^{x^4 - y^2}}$$

teğetin eğimine m_T normalin eğimine m_N denirse

$m_T = y'(1,1) = 1$ ve $m_N = -1$ bulunur. O halde $A = (1,1)$ noktasından geçen teğet denklemi;

$$y - 1 = x - 1 \;\Rightarrow\; y = x$$

ve $A = (1,1)$ noktasından geçen normal denklemi;

$$y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow\; y = -x + 2$$

elde edilir.